数学小丛书

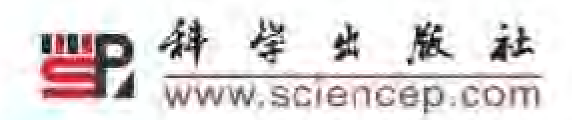


格点和面积

闵嗣鹤







(O-1389.0101) 责任编辑：毕 颖/总体设计：黄华斌/责任印制：安春生

数学小丛书



ISBN 7-03-009423-9/O · 1389

全套书定价　99.00 元(共18 册)

数学小丛书 6

格点和面积

闵 嗣 鹤

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

一张方格纸，上面画着纵横两组平行线，相邻平行线之间的距离都相等．这样两组平行线的交点，就是所谓格点．在平面上一个有限的区域内，格点的个数总是一个整数．怎样用格点的个数去计算平面上有限区域的面积，或者，反过来，在平面上已知面积的一个有限区域内至少有多少格点，这就是这本小册子所要讨论的问题．这里面特别讨论了一条叫做“数的几何中的基本定理”．为了证明这条定理，书中还介绍了一条叫“重叠原则”的定理．联系重叠原则，又讨论了怎样用有理数逼近无理数等问题．这本小册子就是这样围绕着格点和面积这个主题，讲了数学上一些有用的问题．

图书在版编目(CIP)数据

格点和面积/闵嗣鹤．—北京：科学出版社，2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ．格… Ⅱ．闵… Ⅲ．面积-普及读物 Ⅳ．O123.3-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010123号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年5月第一版 开本：787×960 1/32

2002年5月第一次印刷 印张：2 1/8 插页：1

印数：1—5 000 字数：29 000

全套书定价：99.00元(共18册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

目　　录

1 什么是格点？

平常我们用的方格纸，都画着纵横两组平行线，相邻平行线之间的距离总是相等的. 方格纸上两组直线的交点，就是所谓**格点**.

如果取一个格点做原点 O，如图 1，取通过这个格点的横向和纵向两直线分别做横坐标轴 OX 和纵坐标轴 OY，并取原来方格纸上相邻平行线之间的距离做单位长，那么，我们就建立了一个**坐标系**. 这时，前面所说的格点，显然就是纵横两坐标都是整数的那些点. 如图 1 中的 O,P,Q,M,N 都是格点. 由于这个缘故，我们又称格点为**整点**.

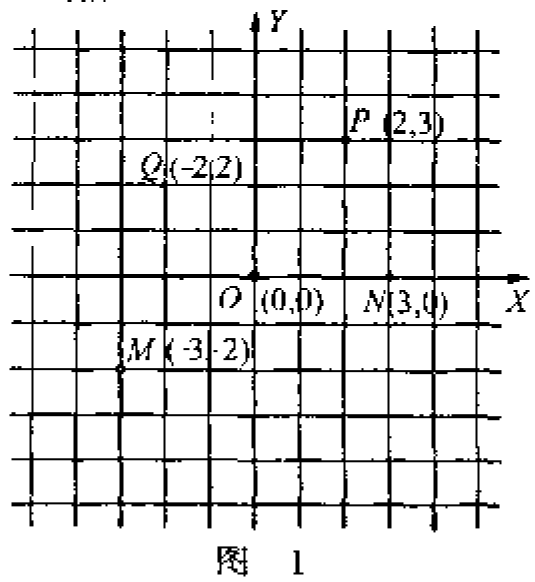


图 1

2 我们的中心问题

在这本小册子里所要讨论的问题，都是围绕着格点和面积这个主题的.

在一个平面上，格点有无穷多，但是两个不同格点的距离至少是1，因此，我们说平面上的一个个格点是孤立的或**离散的**. 在平面上一个有限的区域内（例如某一个圆内），格点的个数总是一个整数. 格点的个数如果要增加或减少，增加或减少的至少是 1 个，不会有不到 1 个的小数. 与此相反，平面上一个区域的面积，常常随着区域边界的微小变动而相应地改变，比方可以改变 0.1 个单位，或更小如 0.01 个单位，以至 0.001 个单位，0.0001 个单位，……因此，我们可以说面积是一种随边界的连续变动而连续变化的量.

在数学里面，我们有两个很基本的问题，那就是：第一，怎样用连续的量去概括离散的量；第二，怎样用离散的量去逼近连续的量. 这两个

问题其实是一个问题的两个方面.不过,第一个问题着重在利用连续的量去研究或估计离散的量.这是古老的物理和数学上的问题.著名的圆内格点问题就属于这一类型.这问题是:知道了以原点做中心的圆的面积,要估计圆内格点的个数(参看习题2).近年来,由于电子计算机的长足发展,对于许多离散的量都有了计算的办法,因此,又产生了大量的用零散的量去逼近连续的量的问题.一个简单的例子就是:怎样用一个区域内的格点数去逼近区域的面积,这也就是本书所要讨论的一个中心问题.

3 面积的近似计算

当我们测量田地、园林、湖沼、岛屿等等的面积时，需要种种简便方法来计算面积的近似值. 最常用的有所谓平行线法、方格法和三角法. 这里顺次简单地介绍如下:

(一) **平行线法**　如图 2, 我们用 $n+1$ 条直线把所求面积分成 n 条, 相邻平行线之间的距离都是 d. 为简单起见, 我们假定平行线中第 1 条和第 $n+1$ 条跟所求面积的边界或者相切

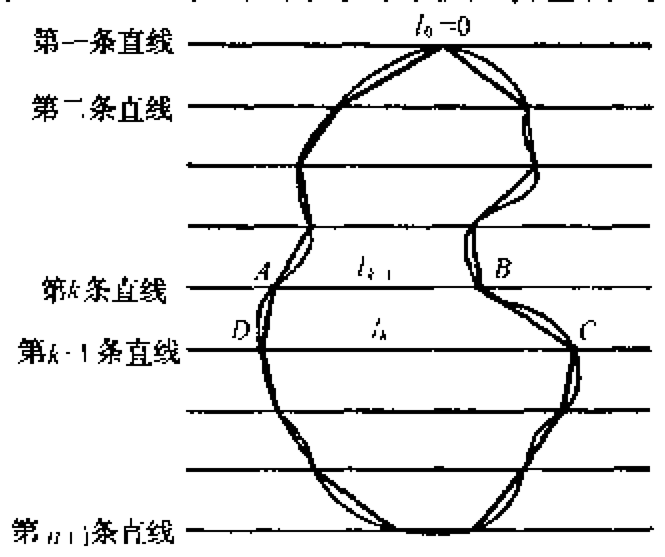


图 2

于一点，或者有一段重合，而其他每一条直线跟面积的边界恰好交于两点.我们依次用 $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}, l_k, \cdots, l_{n-1}, l_n$ 表示各平行线和面积相交的一段的长度(可能是0).考虑在第 k 条直线和第 $k+1$ 条直线之间的面积.当 d 很小时，这一条面积是和图中梯形 $ABCD$ 的面积很接近的.因此，我们可以近似地用梯形面积

$$\frac{1}{2}d(l_{k-1}+l_k)$$

来代替该面积.特别当 $k=1$ 或 $k=n$ 时，所谓梯形可能蜕化为三角形.我们把相应于各条面积的近似梯形面积合起来，就得到所求面积(记作 A)的近似值：

$$A \approx \frac{1}{2}d(l_0+l_1)+\frac{1}{2}d(l_1+l_2)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}d(l_{k-1}+l_k)+\cdots+\frac{1}{2}d(l_{n-1}+l_n),$$

即

$$A \approx d\left(\frac{1}{2}l_0+l_1+\cdots+l_{n-1}+\frac{1}{2}l_n\right), \quad (1)$$

式中≈表示近似地相等.

（二）**方格法**　在所求面积上，打好方格，如图3所示.假定相邻平行线之间的距离是 d，

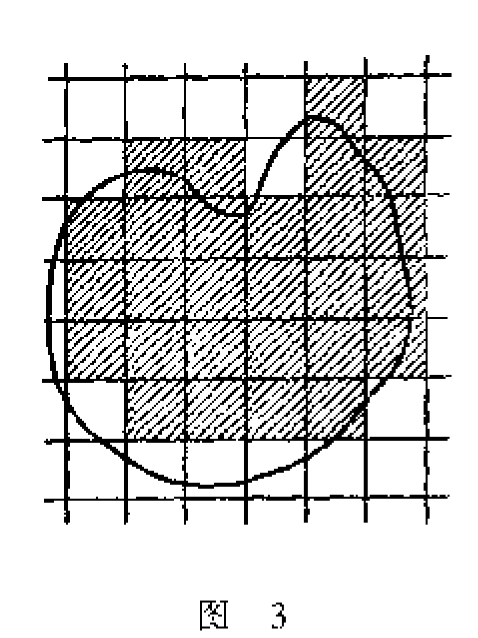


图 3

那么每一方格的面积就是 d^2. 考虑左下角格点落在所求面积上的小方格的全体，这就是图中画上了斜线的那些小方格. 在一般情形下，当 d 取得很小时，这些小方格面积的和是和所求面积很接近的. 另一方面，每一个这种画了斜线的小方格，和它的左下角格点彼此一一对应. 因此，计算一下落在面积上的格点数(记作 N)，就容易得到这种小方格的面积和，它等于 Nd^2. 如果用 A 表示所求面积，那么我们就得到下面的近似公式：

$$A \approx Nd^2. \tag{2}$$

(三) **三角法** 在所求面积的边界上，按一定方向顺次取 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，共 n 个点，依次联结成 n 边形 $P_1 P_2 \cdots P_n$，如图 4 所示. 把这 n

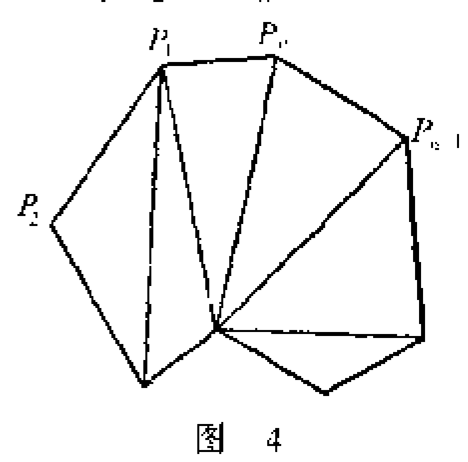


图 4

边形用任意方法分成三角形，然后求各三角形的面积和.我们就可以把所得面积和作为所求面积的近似值.这种求近似值的方法比较灵活，便于在测量上运用.

以上各种求面积近似值的方法，优点是简便易算，缺点是对于误差，没有给出任何的估计.

习　　题

1. 在果园里种树，相邻两株的距离是 d(图 5 中黑点代表树的位置).假如园子的面积是 A，证明果树的株数 N 可以用下面的近似公式表达出来：

$$N \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{d^2}.$$

这是林学上常用的一个公式.

图 5

2. 以原点为中心，R 为半径作圆，记圆内格点数为 N.证明：

$$|\pi R^2 - N| \leqslant 4\sqrt{2}\pi R.$$

4 格点多边形的面积公式

一个多边形的顶点如果全是格点，这个多边形就叫做**格点多边形**．前面用方格法求面积的时候，得到的是近似公式，这公式的误差还没有估计．由于格点多边形是比较特殊的多边形，它和格点更有密切的关系，因此，我们提出这样的问题：对于格点多边形，能否建立格点数目和面积之间的精密公式？这问题如果能够得到肯定的回答，那对于用方格法求面积也是有帮助的．如图6所示，我们作了两个格点多边形：一个是包含着所求面积的最小格点多边形，一个是被含在

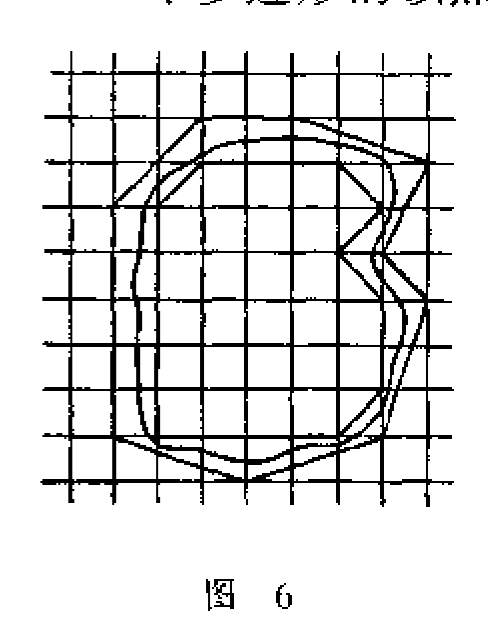


图 6

所求面积的内部的最大格点多边形. 显然所求面积 A 一定在这两个格点多边形的面积 A_1 和 A_2 之间，即

$$A_1 \leqslant A \leqslant A_2.$$

从上式各减去 A_1 和 A_2 的平均值，就得到

$$A_1 - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant A_2 - \frac{A_1 + A_2}{2},$$

即

$$-\frac{A_2 - A_1}{2} \leqslant A - \frac{A_1 + A_2}{2} \leqslant \frac{A_2 - A_1}{2},$$

或

$$\left| A - \frac{A_1 + A_2}{2} \right| \leqslant \frac{A_2 - A_1}{2}.$$

这说明：如果我们用所做两个格点多边形面积的平均值作为所求面积的近似值，误差顶多是两个格点多边形面积的差的一半. 这种求面积近似值的方法可以看成是方格法和三角法的结合.

在一般数学书里面，只讲公式的证明而不讲怎样寻求公式. 这里，为了引起读者钻研问题的兴趣，我们要借助这一个简单的例子——寻求联系格点多边形的面积和格点数的精确关系

——说明怎样通过特殊的情形归纳出一般的公式.

为简单起见,假定每个小方格的边长 $d=1$.首先,选择面积和格点数都容易计算的格点多边形作为具体例子,加以讨论.例如边长是 1 或 2 的格点正方形(图 7 中的 $OABC$ 和 $OPQR$),两腰是 1 的格点三角形(图 7 中的 OAB),一腰是 1,一腰是 2 的直角三角形(图 7 中的 OPC),边长是 2 和 4 的格点矩形(图 7 中的 $OLMR$).我们把它们的面积 A,内部格点数 N 和边上格点数 L,列成一表如下:

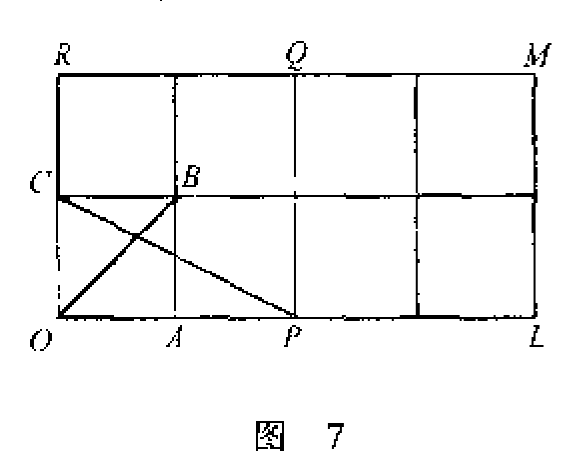


图 7

图　形	A	N	L	$A-N$	$L/2$
$OABC$	1	0	4	1	2
$OPQR$	4	1	8	3	4
OAB	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
OPC	1	0	4	1	2
$OLMR$	8	3	12	5	6

看过上表的前四行,我们可能感到很失望,A,N,L 之间几乎看不出什么联系来.不过我们在前面已经看到,当 A 很大时,A 和 N 的差是(相对地说)很小的.因此,我们在表上添了一行,包含 $A-N$ 的值.这行数字是随着 L 而增大的.如果用 2 去除 L,列到最后一行,我们立刻得到下面的有趣的关系:

$$A-N=\frac{L}{2}-1,$$

即

$$A=N+\frac{L}{2}-1. \qquad (3)$$

这就是说,如果我们把边上的每一个格点作为半个来计算,那么格点数 $N+\frac{L}{2}$和面积 A 的差就恰好是 1.

公式(3)是我们从五个特例归纳出来的.它到底是正确的,还是一种巧合呢?要彻底解决这个问题,当然还要通过严格的证明.不过,目前我们还应该抱怀疑的态度,再检验一下,理由是,我们的五个特例还是既简单又特殊的.为了容易列表,我们的确应该先选择简单而易于验算的特例,但在归纳出公式以后,就需要找一个更复杂更有代表性的例子,再来验证一下公式

的正确性.例如我们选择图 8 的四边形 $ABCD$,

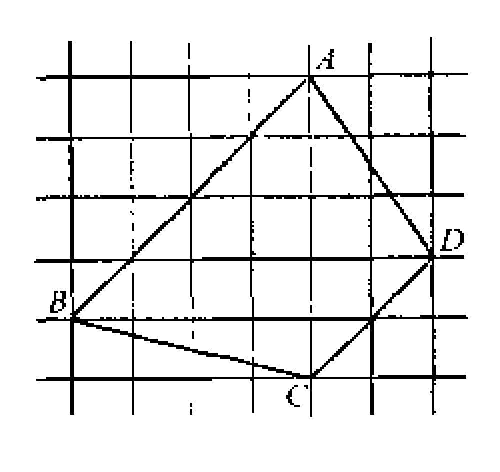


图 8

不难看出,对于这个四边形,我们有

$A=15, N=12, L=8,$

而

$$15 = 12 + \frac{8}{2} - 1.$$

这个附加的特例,使我们对于公式(3)的正确性,得到更大的保证.因此,我们应该进一步考虑怎样去证明这个公式了.

5 格点多边形面积公式的证明

像寻求公式的时候那样，我们在思索一个公式的证明时，也可以先从比较简单的特殊情形想起.现在我们就先考虑两边平行于坐标轴的格点矩形 $ABCD$，如图 9.假定这矩形的长宽分别是 m 和 n .容易从图9看出，这时，面积

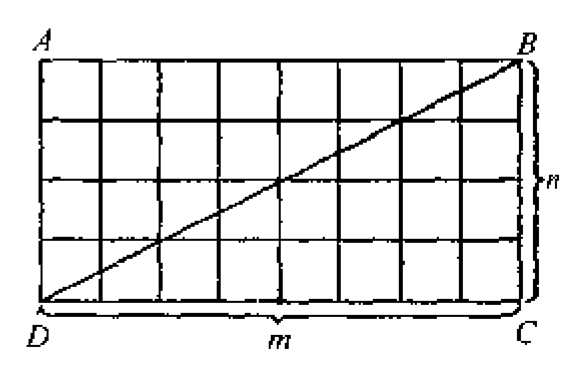


图 9

A，内部格点数 N 和边上格点数 L 分别是

$$\left.\begin{aligned} A &= mn, \\ N &= (m-1)(n-1), \\ L &= 2(m+1)+2(n-1)=2(m+n). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(最后一式中,$2(m+1)$是上下两边的格点数,$2(n-1)$是左右两边除去顶点以外的格点数.)因此,

$$N+\frac{L}{2}-1=(m-1)(n-1)+(m+n)-1$$

$$=mn=A.$$

这表明公式(3)对于矩形是成立的.

有了矩形作基础,我们就不难讨论两腰分别和两坐标轴平行的格点直角三角形,例如上图中的$\triangle BCD$或$\triangle ABD$.由图形的对称性,容易看出$\triangle BCD$和$\triangle ABD$的面积,内部格点数和边上格点数都是分别相等的.(事实上,如果把矩形$ABCD$绕它的中心即对角线的交点旋转$180°$,那么$\triangle ABD$就和$\triangle CDB$重合,而且格点也都一一重合起来了.)如果用L_1表示BD线段内部格点数(即不包含端点的格点数),那么,除去这L_1个格点以后,矩形内部的格点就平均分配在$\triangle BCD$和$\triangle ABD$的内部.又前面已经算出,矩形内部的格点数是$(m-1)(n-1)$,所以这两个三角形内部都有

$$N=\frac{(m-1)(n-1)-L_1}{2}$$

个格点.又容易看出,这两个三角形边上的格点数都是

$$L = m + 1 + n + L_1,$$

而面积显然都是

$$A = \frac{mn}{2}.$$

因此

$$N + \frac{L}{2} = \frac{(m-1)(n-1) - L_1}{2} + \frac{m + n + 1 + L_1}{2}$$

$$= \frac{mn}{2} + 1 = A + 1.$$

这表明公式(3)对于两腰平行于坐标轴的格点直角三角形是正确的.

现在我们进一步讨论一般的格点三角形.

$\triangle ABC$ 是一个格点三角形,如图 10,方格纸上通过三顶点的直线围成一个矩形 $ALMN$.

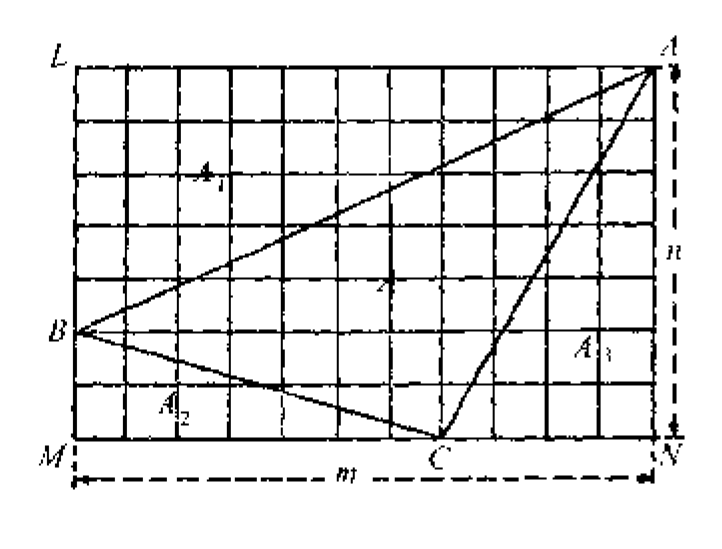


图 10

三角形 ALB，BMC，CNA 都是直角三角形，因此都满足公式(3)．现在把图中四个三角形的面积，内部格点数和边上格点数，分别用不同的记号表示出来，列成下表：

三角形	面　积	内部格点数	边上格点数
$\triangle ABC$	A	N	L
$\triangle ALB$	A_1	N_1	L_1
$\triangle BMC$	A_2	N_2	L_2
$\triangle CNA$	A_3	N_3	L_3

利用前面所得到的关于矩形面积和格点的公式(4)，由图 10 容易看出

$$\left.\begin{aligned}
&A + A_1 + A_2 + A_3 = mn, \\
&N + N_1 + N_2 + N_3 + L - 3 = (m-1)(n-1), \\
&L + L_1 + L_2 + L_3 - 2L = 2(m+n).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

对于最后一行，还需要解释一下．显然 $\triangle ABC$ 边上每一个格点也是相邻三角形边上的一个格点．因此，每一个这样的格点恰好在 $L_1 + L_2 + L_3$ 中计算了一次．又 A，B，C 三点都在 $L_1 + L_2 + L_3$ 中计算了两次，所以 $L + L_1 + L_2 + L_3 - 2L = L_1 + L_2 + L_3 - L$ 实际上就是矩形边界

上的格点数,因此,它等于 $2(m+n)$.

顺次用 1, 1, $\frac{1}{2}$乘(5)式的三个式子,然后相加,就得到

$$A-(N+\frac{1}{2}L)+[A_1-(N_1+\frac{1}{2}L_1)]$$

$$+[A_2-(N_2+\frac{1}{2}L_2)]+[A_3-(N_3+\frac{1}{2}L_3)]+3$$

$$=\quad 1.$$

但是,我们已经知道公式(3)对于直角三角形是成立的,因此,上式中有方括号的各项都等于 -1. 所以由上式得

$$A-(N+\frac{1}{2}L)=-1.$$

这表明对于格点三角形,公式(3)是正确的(参看习题 5).

最后,讨论一般的具有 n 个顶点的格点多边形 $A_1A_2\cdots A_n$,如图 11 所示. 我们可以用数学归纳法. 当 $n=3$ 时,公式(3)已经证明. 现在假定该公式对于 $n-1$ 边形成立,要证明公式对于 n 边形也成立. 联结 $A_{n-1}A_1$,我们就把这个 n 边形分成一个格点三角形和一个 $n-1$ 边格点多边形.

用

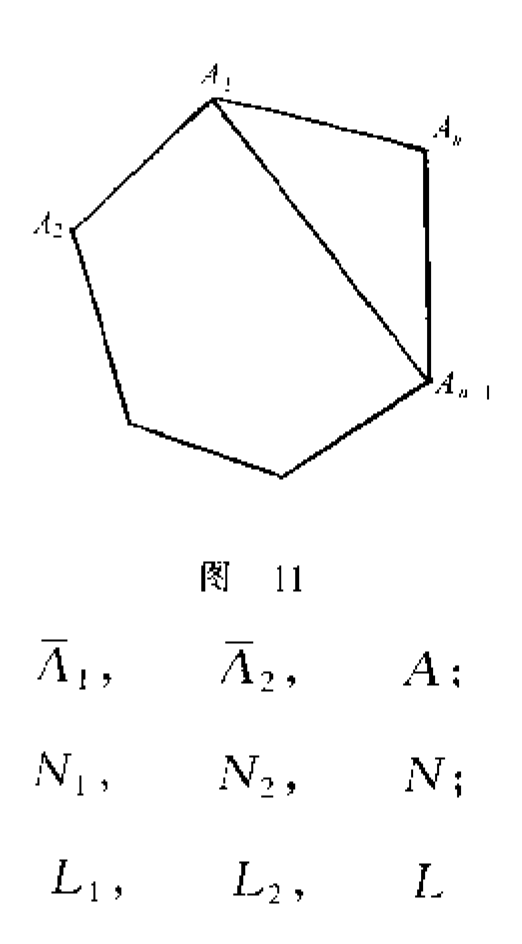


图 11

$$\bar{A}_1, \quad \bar{A}_2, \quad A;$$

$$N_1, \quad N_2, \quad N;$$

$$L_1, \quad L_2, \quad L$$

分别表示这三角形，$n-1$ 边形和原来的 n 边形的面积，内部格点数和边上格点数，我们就得到

$$A = \bar{A}_1 + \bar{A}_2,$$

$$N = N_1 + N_2 + L_0 - 2,$$

$$L = L_1 + L_2 - 2L_0 + 2,$$

其中 L_0 表示 A_1A_{n-1} 上的格点数（包含 $\bar{A}_1$，$\bar{A}_{n-1}$ 两点）．因此，根据归纳法的假设

$$N + \frac{L}{2} = (N_1 + \frac{L_1}{2}) + (N_2 + \frac{L_2}{2}) - 1$$

$$= \overline{A}_1 + 1 + A_2 + 1 - 1$$

$$= A + 1.$$

这就证明了公式(3)对于 n 边形也成立(参看习题 5).

习　　题

3. 证明:内部和边上(顶点除外)没有格点的格点三角形的面积等于 $\frac{1}{2}$.

4. 证明:对边平行且相等的 $2n$ 边格点多边形面积总是整数.

5. 上面对于公式(3)的证明还需要一些补充.在我们考虑一般的格点三角形时,可能遇到像图 12 中的那种情形.试考虑一切可能的情形,并且加以讨论.又

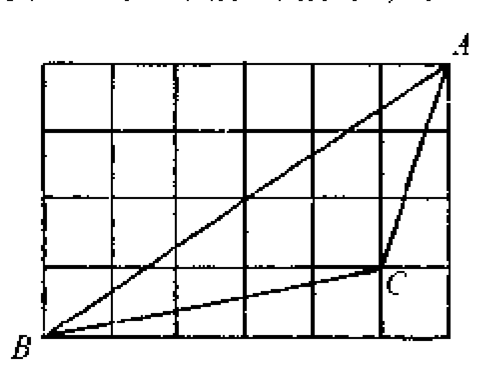


图　12

我们暗中假定格点多边形是凸的(各内角小于平角的多边形叫做**凸多边形**).对于不是凸的多边形(图 13),情形比较复杂,我们不去讨论.

6. 要能够用天平称出 1 克,2 克,⋯,40 克这些不同的重量,至少要有多少种不同的砝码?这里我们可

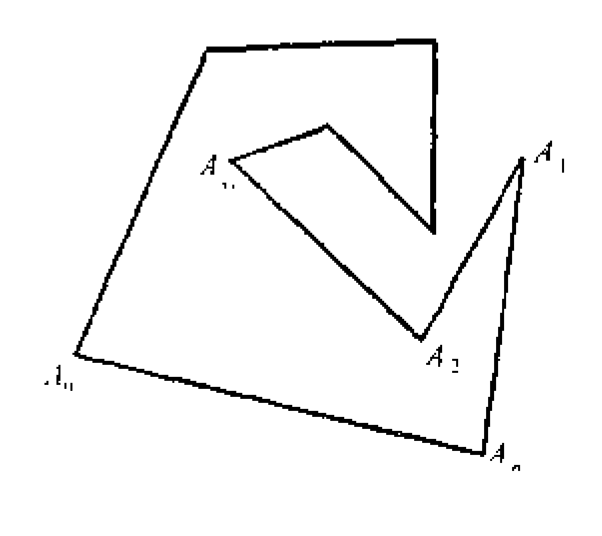


图 13

以:(1)限制把砝码放在天平的一个盘子上,(2)允许把砝码放在天平的两个盘子上.试推广你的结果.

7. 某卡车只能带 L 升汽油,用这些汽油可以行驶 a 公里.现在要行驶 $d=\frac{4}{3}a$ 公里到某地,中途没有加油的地方,但可以先运汽油到路旁任何地点存储起来,准备后来应用.假定只有这一辆卡车,问应怎样行驶,才能达到目的地,并且最省汽油?如果到目的地的距离是 $d=\frac{23}{15}a$ 公里,又怎样?试推广你所得的结论.

6 另外一个问题的提出

为了进一步弄清面积和格点个数的关系，我们很自然要提出如下的问题：已知一个区域内所包含格点的个数，它的面积最大是多少？如果对于区域不加任何限制，它的面积显然可以任意大．事实上，直线 $y=\frac{1}{3}$ 和 $y=\frac{2}{3}$ 之间并不包含格点，面积却是无穷大．对于比较特殊的区域，问题常常不难回答．举几个例子如下：

例 1 两边平行于坐标轴的正方形，如果内部不含格点[1]，它的面积最大是 1.

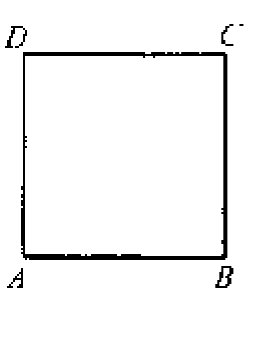


图 14

证 任取正方形 $ABCD$，如图 14，假定 AB 和 BC 分别平行于横坐标轴和纵坐标轴．假定它的面积大于 1，即边长大于 1．我们只要证明：这

[1] 这里和以后都假定小方格的边长是 1．

正方形内部至少包含一个格点.

延长 DA, CB, 使之和横坐标轴 OX 交于 P, Q, 如图 15. 设这两点离 O 的距离分别是 p

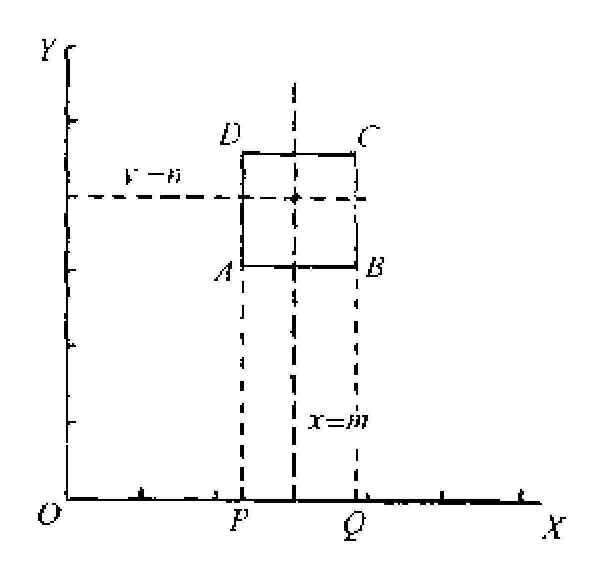


图 15

和 q, $p<q$. 由假设,正方形边长是

$$q - p > 1.$$

设 m 是 q 的整数部分,那么当 q 不是整数时,

$$q = m + r,$$

其中 m 是整数,而 $0<r<1$. 代入上面的不等式,就得到

$$m + r - p > 1,$$

即

$$m - p > 1 - r > 0.$$

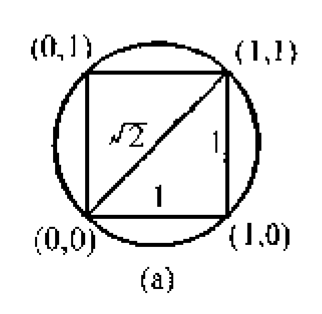
因此

$$p < m < q.$$

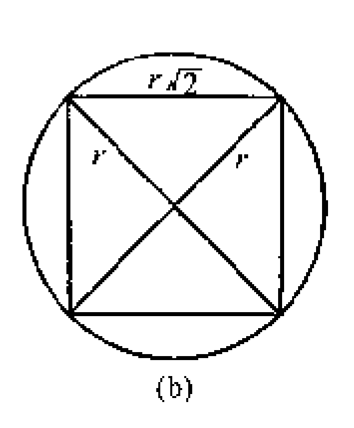
这表明直线 $x = m$ 穿过直线 AD 和 BC 之间. 又当 q 是整数时,可取 $m = q - 1$. 仿上,可以找到一条直线 $y = n$,穿过 DC 和 AB 之间. 它们的交点(m, n)是一个格点,这格点就在正方形 $ABCD$ 的内部. 这证明了我们的定理.

例 2 内部不含格点的圆,面积顶多等于 $\frac{\pi}{2}$,这恰好是通过四个相邻格点(即一个小方格的顶点)的圆的面积.

证 图 16(a)中圆的面积显然等于 $\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$. 一般情形下,如果圆的半径等于 r,它的面积就等于 πr^2. 因此,面积是否大于 $\frac{\pi}{2}$,就看 r 是否大于$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 如果 $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$,那么,由图 16(b)可以看出,这个圆的内接正方形的边长是 $r\sqrt{2} > 1$. 我们可以假定这个正方形的边平行于坐标轴,那么根据上面证明的定理,在这正方形内部,至少有



(a)



(b)

图 16

一个格点,因而在圆内至少有一个格点.这证明了我们的定理.

仿照这个方法,还可以证明:

例3 内部不含格点的正方形面积,顶多是2.

这一证明留给读者自己去做(习题8).

此外,我们还可以讨论,内部只含一个格点的圆面积或正方形面积的最大值(参看习题9和10).

在这些例子里面,所讨论的区域都是很特殊的.如果区域更带一般性,问题当然就更难解决.例如,我们要问:以原点做中心的椭圆(或以原点做对角线交点的平行四边形),如果除原点以外,不包含其他的格点,它的面积最大是多少?这个问题就不容易解决了.在这本小册子里,我们要证明一个包含上面两个特殊情形在内的定理,这就是所谓"数的几何"中的基本定理:关于原点对称的凸区域,如果除原点以外不包含其他格点,它的面积顶多是4.对于这个定理的意思,以后还要详细解释.

在以后证明上面所说的定理时,要用到一个带一般性的定理,就是所谓**重叠原则**.因此,我们在下面先介绍这个原则的最简单的形式,利用它解决一些其他的问题,然后回到上面提出的定理来.

习　　题

8. 证明:内部不含格点的正方形的面积顶多等于2.

9. 求内部只含一个格点的最大圆面积.

10. 求内部只含一个格点的最大正方形面积.

7 重叠原则

这个原则的最简单的形式可以叙述如下：

重叠原则 把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个空位子上，那么，至少有一个空位子里要放进两个或者更多的物体.

这是很明显的一件事实.要证明它，可以用反证法：如果每个位子顶多放一个物体，总数必小于或等于 n.

这个原则虽然十分明显，但加以灵活运用，可能得到意想不到的结果.现在先举一个通俗的例子，来说明这个原则的灵活运用.

例如一个制造铁盘的车间，只能控制盘子的重量在指定的 a 克到 $(a+0.1)$ 克之间.现在需要制成重量相差不超过 0.005 克的两个铁盘来配制一架天平.问怎样完成这项任务？

这个问题可以用重叠原则来解决.这个车间可以制造 21 个重量在 a 克到 $(a+0.1)$ 克的盘子，然后把盘子依重量分类，使得重量不到

$(a+0.005)$克的为第一类，重量不小于$(a+0.005)$克但小于$(a+0.005\times 2)$克的为第二类，一般地说，重量不小于$(a+0.005m)$克但小于$[a+0.005(m+1)]$克的为第$m+1$类，这里$m\leqslant 18$，最后，重量不小于$(a+0.005\times 19)$克的为第20类．根据重叠原则，至少有一类包括两个盘子，它们的重量相差不超过0.005克．

习　题

11．说明在4万人中至少有两个人是同年同月生的．又在中国，至少有两个人出生时间相差不到5秒钟．

8 有理数和无理数

为了说明怎样运用重叠原则，我们举出用有理数逼近无理数的问题作为一个例子．在讲这个问题之前，先解释一下什么是有理数和无理数．

所谓有理数，就是可以写成分式$\frac{n}{m}$的数，其中 m 和 n 都是整数，且 $m>0$；所谓无理数就是不能写成这种形式的实数，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$和π．

我们知道，分数都可以写成有限小数（有限位小数）或循环小数，例如$\frac{3}{5}=0.6$，$\frac{2}{3}=0.\dot{6}$，$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$．反过来说，有限小数和循环小数都可以表成分数．因此，所谓无理数就是无限不循环小数（无限位不循环小数）．

作为一个例子，我们来证明$\sqrt{2}$是无理数．这里要用反证法．假设

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}, \tag{6}$$

其中 m, n 是正整数. 我们可以假定 $\frac{n}{m}$ 是既约分数,这样, m 和 n 不能都是偶数. 由(6)式得

$$2 = \frac{n^2}{m^2},$$

即

$$2m^2 = n^2. \tag{7}$$

如果 n 是奇数,它可以写成 $n = 2k + 1$,这里 k 是整数. 因此,

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1,$$

这仍然是奇数. 但(7)式的左边是偶数,所以 n^2 是偶数. 因此, n 也只能是偶数. 令 $n = 2n'$,代入(7)式,得

$$2m^2 = 4n'^2,$$

即

$$m^2 = 2n'^2.$$

根据同样的理由,从上式知道 m 必须是偶数,因此, m 和 n 都是偶数. 这和 $\frac{n}{m}$ 是既约分数的假定不合. 因此, $\sqrt{2}$ 是无理数.

用类似的方法，可以证明$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$都是无理数，但要证明π是无理数，一般要用到稍深一点的数学，这里就不讲了.

习　　题

12．证明$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$都是无理数.

13．证明：若a和b是有理数，而$b\neq 0$，那么$a+b\sqrt{2}$是无理数．由此证明：任意两个实数之间都有无穷多的无理数.

9 用有理数逼近无理数

现在要讨论用有理数逼近无理数的问题.很明显,任意实数可以用有理数任意精确地逼近,这也就是说,若 α 是无理数,给定任意小的正数 ε,我们可以找到有理数$\frac{n}{m}$,使得二者的差(即误差)$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\varepsilon$.例如 $\pi=3.14159\cdots$.我们如果用 $3, 3.1=\frac{31}{10}, 3.14=\frac{314}{100}=\frac{157}{50}, \cdots$去逼近,误差就分别不超过 $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots$

但是我们所希望的并不止于此.我们希望能用比较简单的分数来比较精确地逼近无理数.所谓比较简单的分数,可以理解成分母比较小的分数.例如,我们希望分母不超过 m.我们容易证明:

定理 1　任给无理数 α 和正整数 m，可以找到分数 $\frac{n}{m}$，使得

$$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{2m}. \tag{8}$$

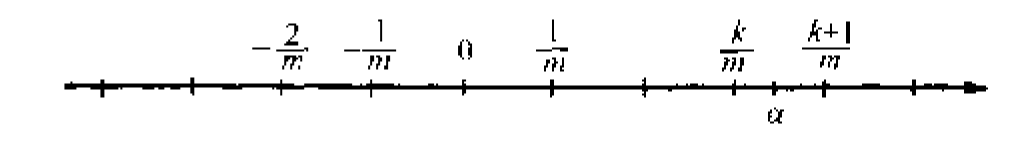


图　17

证　在实数轴上，我们把形如 $\frac{k}{m}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）的数所对应的点都标出来，如图 17 所示．实数 α 所对应的点一定落在以上某两点之间．设 α 在 $\frac{k}{m}$ 和 $\frac{k+1}{m}$ 之间，那么

$$\frac{k}{m}<\alpha<\frac{k+1}{m}. \tag{9}$$

（1）若 $\alpha<\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}+\frac{k+1}{m}\right)$，即对应于 α 的点落在中点 $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}+\frac{k+1}{m}\right)$ 的左边，那么

$$0<\alpha-\frac{k}{m}<\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}+\frac{k+1}{m}\right)-\frac{k}{m}=\frac{1}{2m}.$$

（2）若 $\alpha>\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}+\frac{k+1}{m}\right)$，那么

$$0 < \frac{k+1}{m} - \alpha < \frac{k+1}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m} + \frac{k+1}{m}\right) = \frac{1}{2m}.$$

在第(1)种情形下取 $n = k$，在第(2)种情形下取 $n = k + 1$，就都得到

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{2m}. \qquad [证完]$$

看起来$\frac{1}{2m}$似乎是有理数$\frac{n}{m}$与α的误差的很好估计值．但是实际上并不如此．例如我们知道$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$是π的著名近似值，这是我国古代数学家祖冲之(429～500)所求得的，实际误差分别是[1]

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < 0.002 = \frac{1}{500},$$

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < 0.000\,000\,3 < \frac{1}{3\,000\,000}.$$

这里逼近的程度是非常高的，远比$\frac{1}{2\times 7}$和$\frac{1}{2\times 113}$为小．

给定一个无理数α，要具体地求出逼近得

---

① $\pi = 3.1415926535\cdots$.

最佳的分数，可以利用**连分数**. 这在这套丛书中《从祖冲之的圆周率谈起》那一册里面有详细的说明. 在这里，我们要利用重叠原则证明对一般无理数都适用的定理.

定理 2 任给实数 α 和正整数 Q，都可以找到有理数$\frac{n}{m}$($0<m\leqslant Q$)，使得

$$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{mQ}. \tag{10}$$

(由于 $mQ\geqslant m^2$，粗略地说，这定理表明我们可以用$\frac{1}{m^2}$代替(8)式右边的$\frac{1}{2m}$.)

证 我们不妨假定

$$0<\alpha<1. \tag{11}$$

事实上，如果 α 不满足上面的不等式，它总是在两个相邻整数比方 t 和 $t+1$ 之间：

$$t<\alpha<t+1.$$

从上式减去 t，就得到

$$0<\alpha-t<1.$$

令 $\alpha'=\alpha-t$. 如果能找到$\frac{n}{m}$($0<m\leqslant Q$)使得

$$\left|\alpha'-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{mQ},$$

那么

$$\left|\alpha - \frac{tm+n}{m}\right| < \frac{1}{mQ}.$$

这表明:不妨假定 α 满足(11)式.

在实数轴上,令 O 和 E 两点对应于 0 和 1,如图 18.

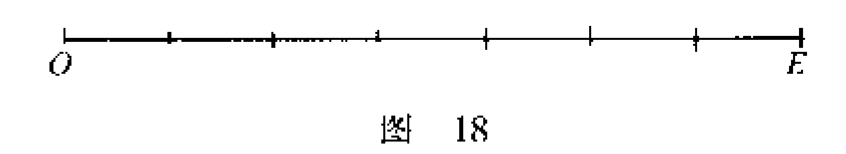


图 18

我们把 OE 线段等分成 Q 份[①](图中 $Q=7$),每一份的长度是$\frac{1}{Q}$.考虑下面一串数:

$$0\cdot\alpha,\quad 1\cdot\alpha,\quad 2\cdot\alpha,\quad 3\cdot\alpha,\quad \cdots,\quad Q\cdot\alpha.$$

现在用下式表示它的小数部分:

$$0,\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},\cdots,\{Q\alpha\}.$$

这里一共有 $Q+1$ 个数,对应的点都在 OE 线段上[②].前面已经把 OE 分成 7 段,根据重叠原则,至少有两个点(设对应于$\{h\alpha\}$和$\{k\alpha\}$)落在一段上.假定

$$\{h\alpha\} \leqslant \{k\alpha\},$$

---

① 我们假定每一份只包括左边的端点,不包括右边的端点.

② 注意没有一点和 E 重合.

那么

$$0 \leqslant \{k\alpha\} - \{h\alpha\} < \frac{1}{Q}. \qquad (12)$$

用 r 和 s 分别表示 $h\alpha$ 和 $k\alpha$ 的整数部分，那么

$$\{h\alpha\} = h\alpha - r,$$

$$\{k\alpha\} = k\alpha - s.$$

代入(12)式，就得到

$$0 \leqslant (k - h)\alpha - (s - r) < \frac{1}{Q}.$$

令 $m = |k - h|$，用 m 除上式得

$$0 \leqslant \frac{k - h}{|k - h|}\alpha - \frac{s - r}{m} < \frac{1}{mQ}.$$

当 $k - h > 0$ 时，有 $\frac{k - h}{|k - h|} = 1$，所以得

$$0 \leqslant \left|\alpha - \frac{s - r}{m}\right| < \frac{1}{mQ}.$$

又当 $k - h < 0$ 时，$\frac{k - h}{|k - h|} = -1$，所以得

$$0 \leqslant \left|-\alpha - \frac{s - r}{m}\right| < \frac{1}{mQ},$$

即

$$0 \leqslant \left| \alpha + \frac{s - r}{m} \right| < \frac{1}{mQ},$$

因 $\left| -\alpha - \frac{s - r}{m} \right| = \left| \alpha + \frac{s - r}{m} \right|$. 总之有

$$0 \leqslant \left| \alpha - \frac{\pm(s - r)}{m} \right| < \frac{1}{mQ}.$$

令 $n = \pm(s - r)$，就得到要证明的不等式(10).

习　　题

14. 设 α,β 是两个实数，那么任给正数 N，一定可以找到整数 $n > N$，q 和 r，使得

$$|n\alpha - q|, \qquad |n\beta - r|$$

同时小于任意指定的正整数 ϵ.

15. 证明：可以找到无穷多组整数(x,y)，使满足

(1) $|x^2 - 2y^2| \leqslant 2$，或

(2) $|x^2 - dy^2| \leqslant 1 + 2\sqrt{d}$　$(d > 0)$.

16. 证明：下面前三个方程都有无穷多组整数解(x,y)，但最后一个没有整数解：

(1) $x^2 - 2y^2 = 1$,

(2) $x^2 - 2y^2 = -1$,

(3) $x^2 - 2y^2 = 2$,

(4) $x^2 - 4y^2 = 3$.

10 小数部分$\{k\alpha\}$的分布

为简便起见,我们只讨论 $\alpha>0$ 的情形.令 $k=0,1,2,\cdots$.我们用$\{k\alpha\}$表示 $k\alpha$ 的小数部分.如果 α 是有理数,我们可以把它写成

$$\alpha = \frac{r}{q}.$$

因此,

$$k\alpha = \frac{kr}{q}.$$

设 $kr=tq+s,0\leqslant s<q$,那么

$$k\alpha = t + \frac{s}{q},$$

而

$$\{k\alpha\} = \frac{s}{q}.$$

这表明$\{k\alpha\}$总是落在如图19的q个点上.

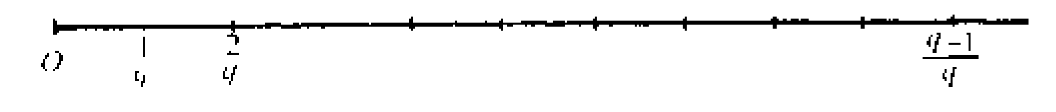


图 19

如果α是无理数,情况就不一样.根据上节定理2,任给正整数Q,都可以找到整数m和n,使得

$$\left|\alpha-\frac{n}{m}\right|<\frac{1}{mQ},\quad (0<m\leqslant Q)$$

由于α是无理数,不等式左边不能等于0,因此,用m乘上式,就得到

$$0<|m\alpha-n|<\frac{1}{Q}.$$

令$\beta=m\alpha-n$,那么

$$m\alpha=n+\beta,\qquad 0<|\beta|<\frac{1}{Q}.$$

因此,

$$km\alpha=kn+k\beta.\tag{13}$$

同时还有

$$km\alpha=kn-1+(1+k\beta).\tag{14}$$

当$\beta>0$且$k<\frac{1}{|\beta|}$时,由(13)式得

$$\{km\alpha\} = k\beta.$$

用$[x]$表示 x 的整数部分且令 k 取 0,1,2,3,⋯, $l = \max\left\{\left[\frac{1}{|\beta|}\right]-1, \left\{\left[\frac{1}{|\beta|}\right]\right\}\right\}$,对应的$\{km\alpha\}$的值是

$$0,\beta,2\beta,3\beta,\cdots,l < 1.$$

当 $\beta<0$ 时,由(14)式得

$$\{km\alpha\} = 1 + k\beta,$$

令 k 取 0,1,2,3,⋯, l,对应的$\{km\alpha\}$的值是

$$1,1+\beta,1+2\beta,1+3\beta,\cdots,1+l>1-1\geqslant 0.$$

这里因为 $\beta<0$,所以 $1+\beta=1-|\beta|$, $1+2\beta=1-2|\beta|$,⋯.可见在两种情形下,当 $k=0,1,2,3,\cdots,l$ 时,$\{km\alpha\}$都均匀地分布在区间$[0,1]$上,相邻两数的差是$|\beta|<\frac{1}{Q}$.由于 Q 可以取得任意大,所以这些数也可以分布得任意稠密.因此,我们说当 α 是无理数时,$\{k\alpha\}$在区间$[0,1]$上是到处稠密的.

11 另一种重叠原则

前面讨论过的重叠原则不过是最简单的一种论证原则，下面要叙述另外一种重叠原则，这是关于面积的重叠原则.

假定平面上有 n 个区域①，它们的面积分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 如果我们把这 n 个区域按任何方式一一搬到某一个固定区域内部去，那么，当面积的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 大于该固

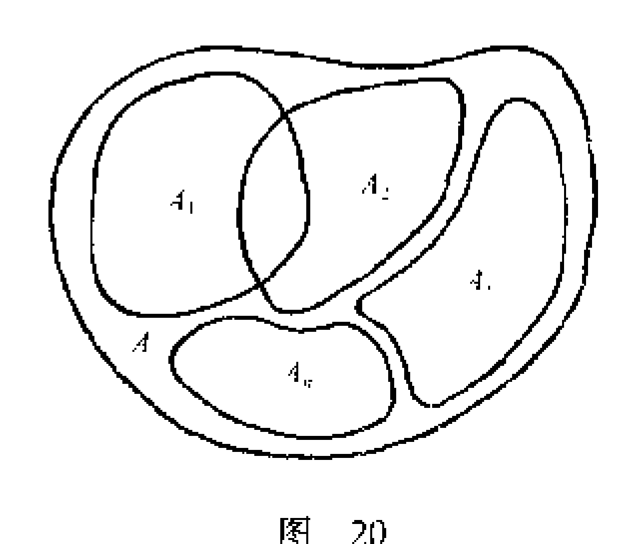


图 20

① 这里不妨把区域看成是由一条曲线所围绕成功的. 例如，一个椭圆或平行四边形的内部都可以叫做区域.

定区域的面积 A 时,至少有两个区域具有公共点(如图 20).

这原则也是很明显的,同样可以用反证法证明:如果它们可以搬到固定区域内部去而没有公共点,它的面积的和顶多等于固定区域的面积 A,这跟假设不符合.

自然对于体积也有类似的重叠原则.

12 数的几何中的基本定理

数的几何是数论的一个分支，它的特点是运用几何的方法解决数论的问题．在数的几何里面所要研究的一个主要问题，就是估计一些齐次式（当变量取不全是0的整数值时）的绝对值的最小值．例如可以证明，二次型（即二次齐次式）$ax^2+2bxy+cy^2$（$a>0,ac-b^2>0$），当x,y取不全是0的整数值时，它的最小值$\leqslant\left(\frac{4}{3}D\right)^{1/2}$，这里$D=ac-b^2$．在这里我们只讨论数的几何中一个基本定理．

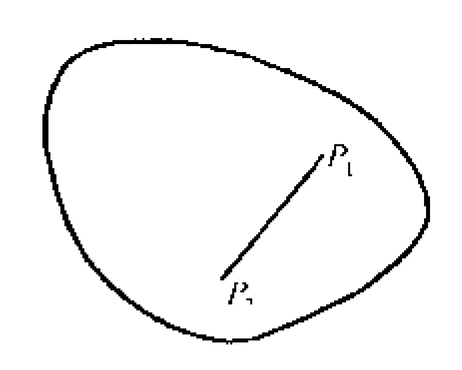
我们考虑围绕原点O的一条简单封闭曲线．所谓简单封闭曲线就是像圆和椭圆那样（没有重①点）而不像8字那样（有重点）的曲线．

我们假定这曲线所围成的区域包含着原

① 重应读作 chóng．

点，并且对于原点来说是对称的. 这意思就是说，如果有一点 P 在那区域内，那么，联结 PO 并延长一倍到 P'（$OP' = OP$），所得到的点 P' 仍然在那个区域内. 例如，以原点做中心的圆和椭圆，以及对角线交点在原点的矩形和平行四边形，都是关于原点对称的区域.

最后我们还要假定曲线所围成的区域是凸的. 这也就是说，在区域里任取二点 P_1 和 P_2，连成的线段一定全部落在区域内. 如图 21，左边的就是凸的，右边的不是凸的.



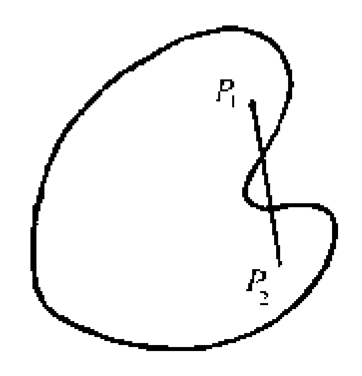


图 21

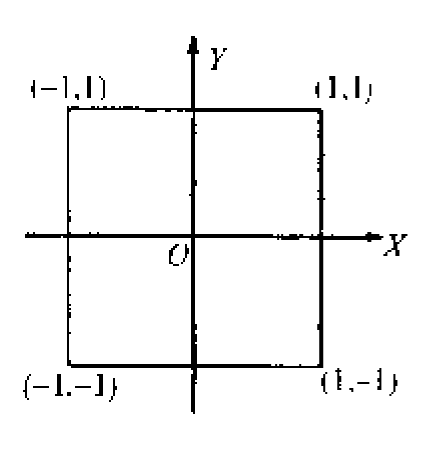


图 22

在此，我们提出一个问题：设有关于原点对称的凸区域，如果除原点外，它的内部不包含其他的格点，那么，它的面积最大是多少？

如图 22 所示的正方

形面积是4,试问满足上述要求的区域,有没有比它面积更大的?下面的定理回答了这个问题.

定理 如果一个关于原点对称的凸区域,面积大于4,那么,它的内部除原点外,一定还有别的格点.

证 如图23,我们用分别和坐标轴距离是偶数的两组平行线,分平面成较大的方格(边长是2),其中标准的一个方格是 $OABC$.它是位于第一象限而离原点最近的一个方格.这些边长是2的方格把我们的凸区域分成许多块,每

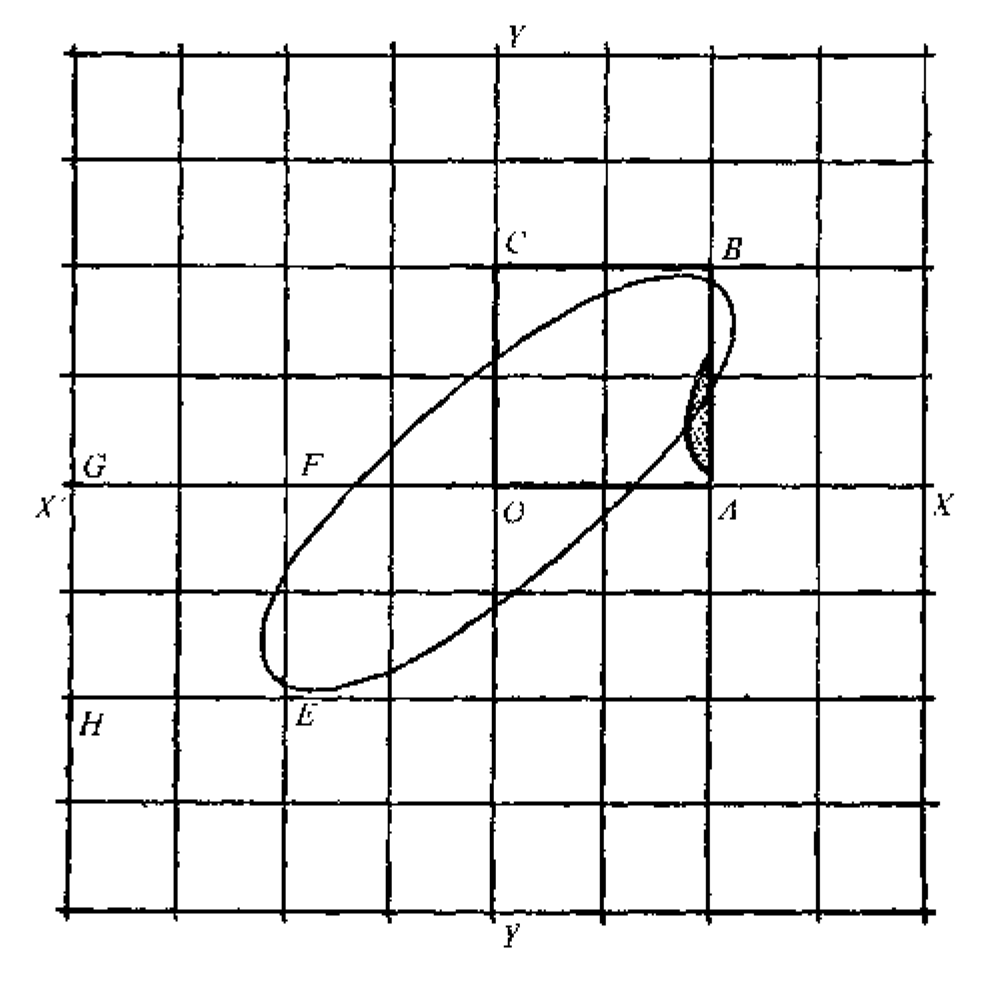


图 23

一个和这区域相交的大方格中各有一块，例如图中 $EFGH$ 这个方格里就有一小块．把 $EFGH$

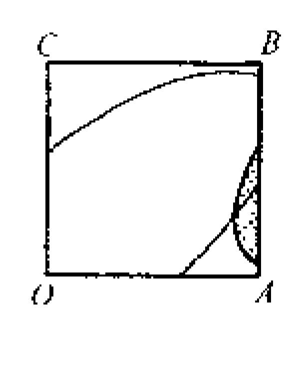


图 24

平行移动到 $OABC$，使彼此相合．那么，$EFGH$ 里面所包含的一小块面积也就连带地被移到 $OABC$ 里面，如图中有小点的那部分，成图 24 的样子．对于其他大方格中的面积可以用同法移到 $OABC$ 里面去．由于凸区域的面积大于 4 而 $OABC$ 的面积等于 4，所以根据重叠原则，至少有两块面积有公共点．

在移动每一个大方格时，可以先沿 OX 轴的方向移动一段距离（等于 2 的倍数），再沿 OY 轴的方向移动一段距离（也等于 2 的倍数），最后就和 $OABC$ 重合．因此，我们从两块面积移动后有公共点这件事实，推出原来凸区域内有两个点 P 和 Q，如图 25 所示，它们的纵坐标的差和横坐标的差都是 2 的倍数．联 P, O 并延长一倍到 P'．根据区域的对称性，我们知道 P' 仍在区域内．联结 $P'Q$，根据区域的凸性，我们知道这线段全体在区域内．

设 P 的坐标是 (x_1, y_1)，那么 P' 的坐标是 $(-x_1, -y_1)$．设 Q 的坐标是 (x_2, y_2)，那么 $P'Q$ 的中点 M 的坐标是 $\left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$（看

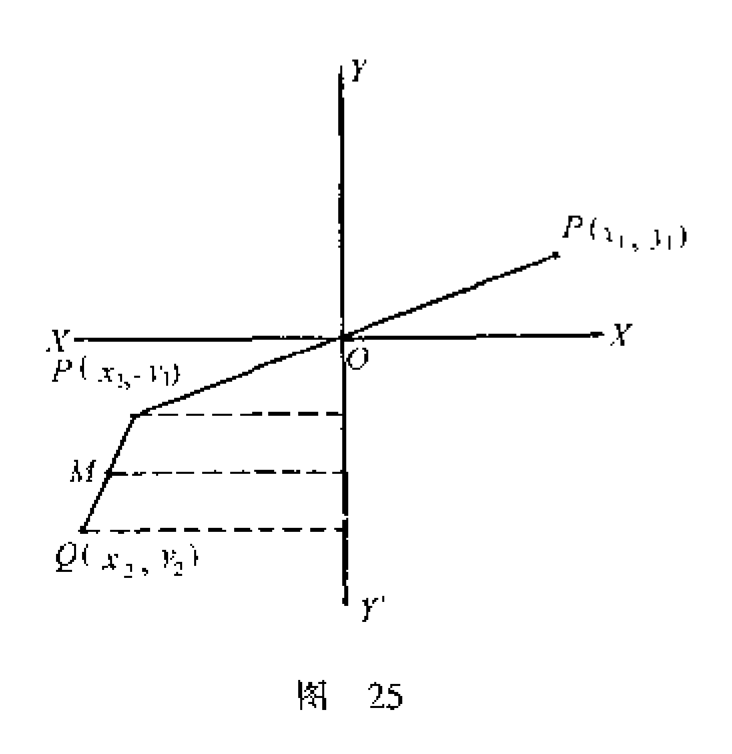


图 25

图 25). 由于 x_2-x_1 和 y_2-y_1 是偶数，所以 $\frac{x_2-x_1}{2}$ 和 $\frac{y_2-y_1}{2}$ 一定是整数，这证明 M 一定是一个格点. 又由于 P,Q 是不同的两点，所以 M 的坐标 $\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2}\right)$ 不可能是 $(0,0)$，这证明我们的凸区域内至少包含一个不是原点 $(0,0)$ 的格点. 定理证完.

习　题

17. 举例说明：定理中提出区域关于原点的对称性和凸性都是必要的.

18. 即使没有区域关于原点的对称性和凸性这两个条件，仍然可以得到这样的结论：在区域中可以找到两个点，它们的横坐标的差和纵坐标的差都是 2 的倍

数.

19. 设 λ,μ 是两实数,而

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy, \qquad \delta = ad - bc \neq 0.$$

其中 a,b,c,d 都是实的常数. 证明:当 $\lambda\mu > \delta$ 时,总可以找到不全是 0 的整数 x,y,使得

$$|\xi| < \lambda, \qquad |\eta| < \mu.$$

20. 设 ξ,η 是如上题所示的一次型(即一次齐次式),证明可以找到不全是 0 的整数 x,y,使得

$$|\xi| + |\eta| \leqslant \sqrt{2|\delta|}.$$

习题解答或提示

1. 对应于每株树(如图26,图中用黑点表示树的位置),有一个四边是 d 而左角是60°的菱形,它的左角顶点恰好是树的位置.取这些菱形面积的和做果园面积的近似值,就得到所需要的近似公式.

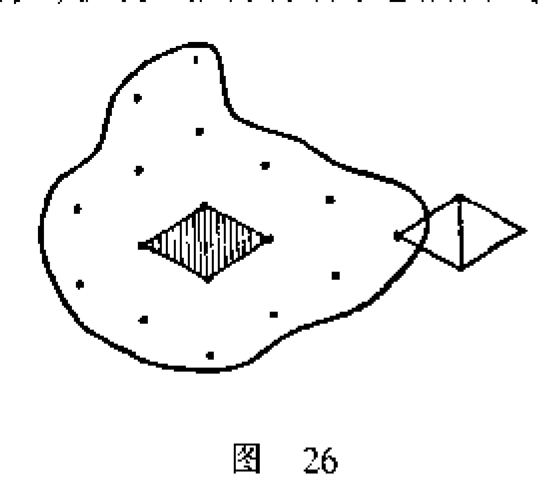


图 26

2. 如图27,用圆内每一格点做左下角有一单位正方形.考虑这些正方形的全体(图27中有斜线的正方形).用 O 做圆心,先做一圆包含所有这些正方形,再做一圆被这些正方形整体遮盖住.这两个圆的半径长度可以取 $R+\sqrt{2}$ 和 $R-\sqrt{2}$.原来圆的面积 A,和图中带斜线的正方形面积的和 N,都在上面所做两圆的面积之间.从此可以推出所需要的不等式.

3. 这是公式(3)的简单推论.

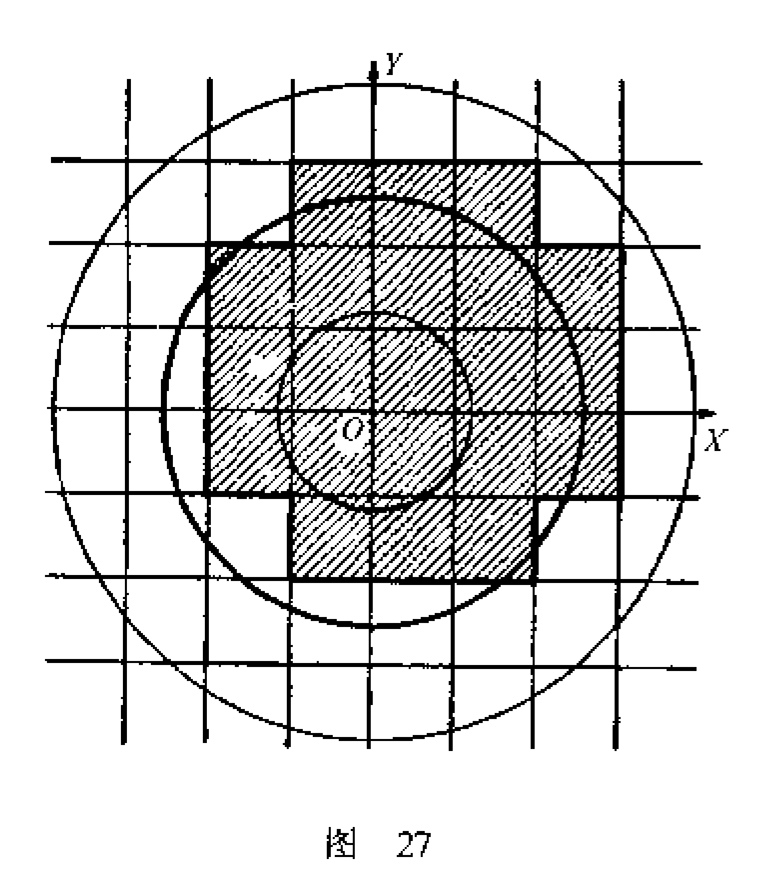


图 27

4. 这是公式(3)的简单推论.

5. 三角形顶点中，一定有一个的纵坐标最大，不妨设是 A. 还有一个顶点的纵坐标最小，不妨设是 B. 横坐标最大和最小的顶点可能是 A，B 和 C. 因此，有如图 28 各种情形.

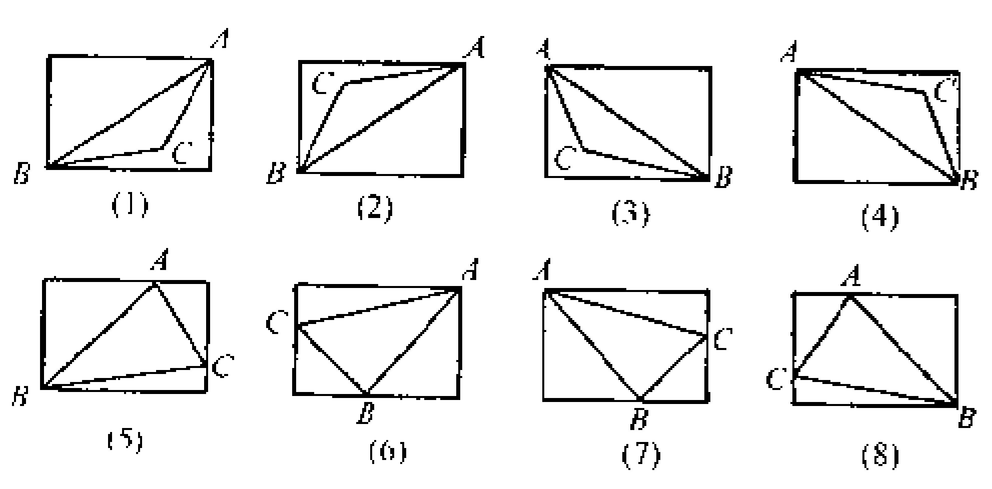


图 28

实际上，可以用(1)，(5)做代表，其他情形都和它们中间的一个相类似.对于(1)的讨论方法和(5)相似，不过要从 C 做两条直线平行于坐标轴，这样，就把图(1)中的矩形分成五块(四个三角形和一个小矩形)了.

6. (1) 用 $1,2,4,\cdots,2^{n-1}$ 克的砝码，可以称出 $1,2,3,\cdots,2^n-1$ 克的重量.不能用较少的砝码称出这些重量.

(2) 用 $1,3^2,\cdots,3^{n-1}$ 克的砝码可以称出 $1,2,3,\cdots,\frac{1}{2}(3^n-1)$ 克的重量.不能用较少的砝码称出这些重量.

这可以用数学归纳法去证明.

7. 在解这题时，最好运用下面带一般性的原则：如果 P 是途中任何一点，那么，卡车(一次或多次)运送过 P 的汽油总量决不能少于在 P 点以后卡车行驶所需的最少总耗油量.

如图 29，O 是出发点，X 是目的地，而 OX 长 $\frac{4}{3}a$ 公里.考虑途中距 X 是 a 公里的点 M，汽车在 MX 之间至少行驶一次，因此，至少耗油 L 升.根据上述原则，至少要运送 L 升的汽油到 M 点.

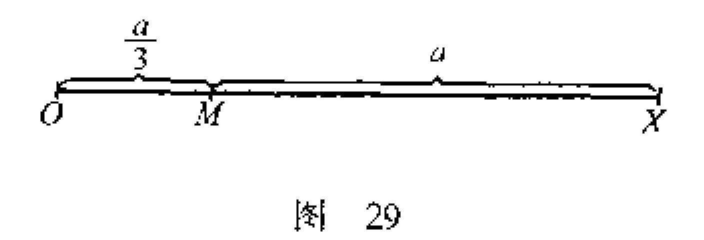


图 29

要运送 L 升的汽油到 M，只从 O 取油一次是不够的(因路上要消耗一部分).因此，至少要取油两次.

根据前述原则，可以证明，OM 上每一点，卡车一定往返经过三次．在 OM 间往返三次，行驶 a 公里，耗油 L 升．加上在 MX 所耗的油 L 升，一共是 $2L$ 升．这是最少耗油量．知道了最少耗油量以后，不难看出，我们可以在 M 点设立一个存油站．卡车从 O 出发，带 L 升汽油，到达 M 点时，已用 $\frac{L}{3}$ 升，还可以存油 $\frac{L}{3}$ 升在 M 处；然后用其余 $\frac{L}{3}$ 升汽油回到 O．第二次从 O 出发，带 L 升汽油，到 M 时还剩 $\frac{2}{3}L$ 升；加上上次所存 $\frac{L}{3}$ 升，共得 L 升，恰够到 X 之用．

若 OX 长 $\frac{23}{15}a$ 公里，那么因为 $\frac{23}{15}a=\frac{4}{3}a+\frac{1}{5}a$，可在 XO 上取一点 M_1，使 XM_1 长 $\frac{4}{3}a$ 公里．根据上面的讨论，从 M_1 到 X 至少耗油 $2L$ 升．仿上，可以证明在 OM_1 之间至少往返五次，耗油 L 升．因此，全程最少耗油量是 $3L$ 升．从此，不难得出设立存油站和具体行驶的方法．

一般地说，若

$$d=a+\frac{a}{3}+\cdots+\frac{a}{2n+1}\text{ 公里}$$

（式中 $n\geqslant 0$ 是整数），那么最少耗油量是 $(n+1)L$ 升．这是不难用归纳法证明的．用 d_n 表示上式右边的和数，那么当

$$d_{n-1}<d<d_n$$

时，可以证明最少耗油量是 $nL+(2n+1)\dfrac{d-d_{n-1}}{a}L$ 升.

8. 面积大于 2 的正方形边长，一定大于$\sqrt{2}$，因此它的内接圆半径大于$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 由此，利用关于圆的结果，立刻得到所需要的结果.

9. 我们用反证法，假定有一个圆，它的半径大于 1，而内部只有一个格点. 这圆的心一定在某一个边长是 1 的格点正方形的内部或边上(如图 30). 这圆至少包含四格点 A,B,C,D 中的一个(例如 D). 因此，至少有两个相对的顶点(例如 A 和 C)不在圆内. 由于 A 不在圆内，所以 A 和圆心的距离大于 1. 因之圆心的位置必在以 A 为中心，以 1 为半径的圆之外. 同理，它也在以 C 为中心，以 1 为半径的圆之外. 这显然是不可能的.

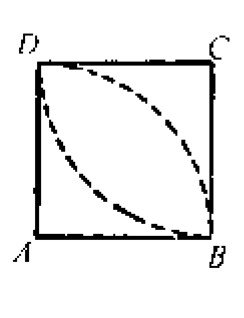


图 30

10. 最大正方形的面积是 4，否则它的内接圆的半径就大于 1 了.

11. 简单应用重叠原则.

12. $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}$可以仿照$\sqrt{2}$讨论，若

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{n}{m}\quad(m,n\text{ 是正整数}),$$

那么

$$\left(\sqrt{2}-\frac{n}{m}\right)^2=3,$$

即

$$\frac{2n}{m}\sqrt{2} = 1 - \frac{n^2}{m^2}.$$

从这里容易得出矛盾. 仿照上面的办法，令

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{n}{m},$$

可以逐步算出

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{n}{m}\right)^2 = 5,$$

$$\frac{n^2}{m^2} - \frac{2n}{m}\sqrt{2} = \left(\frac{2n}{m} - 2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}.$$

平方上式，就不难把$\sqrt{2}$表示成一个分式，因而得出矛盾.

13. 可以用反证法证明当 a,b 是有理数且 $b \neq 0$ 时，$a + b\sqrt{2}$是无理数. 考虑$\sqrt{2} + \frac{n}{m}$，其中 m 是任意指定的很大的正整数，而 n 可以取 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 容易看出这些数分布在实数轴上，相邻两个的差是$\frac{1}{m}$. 由于 m 可以任意大，我们愿意在两个实数 α 和β 之间插进多少这种的数都可以. 因此，它们之间有无穷多的无理数.

14. 只须证同时$\leqslant \frac{1}{Q}$，其中 Q 是任意正整数. 考虑以下各点：

$$(\{k\alpha\}, \{k\beta\}), \quad k = 0, 1, \cdots, Q^2.$$

把满足 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 的点(x, y)所充满的单位正方形分成 Q^2 个相等的小正方形，如图 31. 上面 Q^2

+1 个点都在这单位正方形中. 根据重叠原则, 至少有两个点落在一个小正方形中, 设是

$(\{k_1\alpha\}, \{k_1\beta\}), \quad (\{k_2\alpha\}, \{k_2\beta\}).$

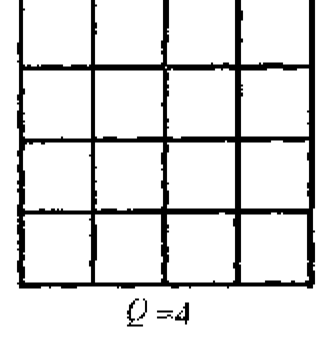


图 31

设

$$\{k_i\alpha\} = k_i\alpha - a_i, \qquad i = 1,2,$$

$$\{k_i\beta\} = k_i\beta - b_i,$$

其中 a_i, b_i 是整数, 容易知道:

$$|(k_1 - k_2)\alpha - a_1 + a_2| \leqslant \frac{1}{Q},$$

$$|(k_1 - k_2)\beta - b_1 + b_2| \leqslant \frac{1}{Q}.$$

从此就得到所要证明的结果.

15. 由定理 2, 存在 x, y 使得

$$|x - \sqrt{2}y| < \frac{1}{Q},$$

所以

$$|x^2 - 2y^2| < \frac{1}{Q}|x + \sqrt{2}y| < \frac{1}{Q}\left(\frac{1}{Q} + 2\sqrt{2}|y|\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{Q^2} + 2\sqrt{2}.$$

由于 Q 可以任意大, 上式右边可以任意接近 $2\sqrt{2} < 3$. 但 $x^2 - 2y^2$ 是整数, 所以

$$|x^2 - 2y^2| \leqslant 2.$$

由于 Q 可以任意大，y 不可能只取有限个值，即有无穷多组解. 仿此可以证明(2)有无穷多组解.

16. 显然 $x^2-2y^2=1$ 有解 $x=3, y=2$，即

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1.$$

平方并化简，得

$$(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})=1,$$

即

$$17^2-2\times 12^2=1.$$

即 $x=17, y=12$ 是另一组解. 取立方，四次方，……即得无穷多组解.

仿上可解(2)，(3). 又因平方数 x^2 用 4 除以后，余数总是 0 或 1，所以 $x^2-4y^2=3$ 无解.

17. 看图 32(不对称)和图 33(不是凸的).

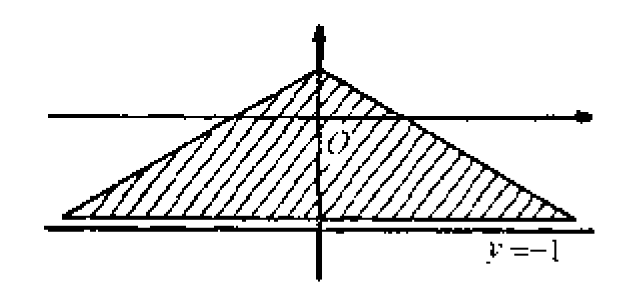


图 32

18. 定理证明的前一部分并未用到区域的对称性和凸性.

19. 满足 $|\xi|<\lambda$ 和 $|\eta|<\mu$ 的一切点 (x, y) 充满一个平行四边形，它的边界分别是下列各方程所表示的直线：

$$\xi = \lambda, \qquad \xi = -\lambda,$$

$$\eta = \mu, \qquad \eta = -\mu.$$

这样,就可以运用定理来解这个习题.

20. 满足 $|\xi| + |\eta| \leqslant \sqrt{2}\,\delta$ 的点充满一个正方形.

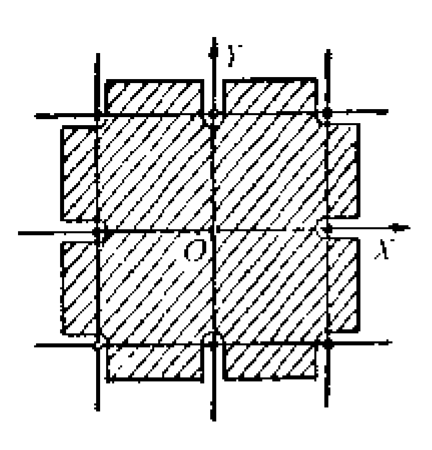


图 33